⋆ ⋆
Exercice 1 — Voir correction

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 2. Calculer $\mathbb{P}(4X \leq X^2 + 3)$

⋆
Exercice 2 — Voir correction

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[-10; 10]$. Calculer $\mathbb{P}\left(\frac{1}{X} > 5\right)$.

⋆
Exercice 3 — Voir correction

Soient a et b deux réels fixés.

1) Montrer que si X suit la loi uniforme sur $[0, 1]$, alors $Y = aX + b$ suit une loi uniforme, on précisera la fonction de densité de Y.
2) Montrer que si X suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, alors $Y = aX + b$ suit une loi normale que l'on précisera.

⋆
Exercice 4 — Voir correction

Soit X une variable aléatoire à densité suivant la loi $\mathcal{N}(0, 4)$. On pose $Y = |X|$.

1) Justifier que Y est une variable à densité et préciser une densité de Y.
2) Déterminer l'espérance et la variance de Y.

⋆
Exercice 5 — Voir correction

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$ et λ un réel strictement positif.
On pose $V = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - U)$ et on admet que V est une variable aléatoire.

1) Calculer $P(V \leq x)$ pour tout réel x.
2) En déduire que V est une variable aléatoire à densité et préciser une densité de V

⋆
Exercice 6 — Voir correction

Soit Y une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et soit $L \in \mathbb{R}_+^*$. On s'intéresse à la variable aléatoire discrète X définie par $X = \left\lceil \dfrac{Y}{L} \right\rceil$ où $\lceil x \rceil$ désigne le plus petit entier k tel que $x \leq k$ (partie entière supérieure).

1) Quel est l'ensemble des valeurs prises par X ?
2) Montrer que X suit une loi géométrique dont on précisera les paramètres.
3) Peut on choisir L pour que X et Y ait la même espérance ?

⋆
Exercice 7 — Voir correction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x\,\mathrm{e}^{-x^2/2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

1) Montrer qu'il existe une variable aléatoire X telle que f est une densité de X.
2) Déterminer F_X la fonction de répartition de X
3) Tracer l'allure de la courbe représentative de F_X
4) Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.
5) On pose $Y = X^2$ et on admet que Y est une variable aléatoire bien définie. Déterminer la loi suivie par Y.

⋆
Exercice 8 — Voir correction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(1 + \mathrm{e}^{-x})^2}$.

1) Montrer que f est une densité de probabilité.
2) Soit X une variable aléatoire qui admet f comme densité. Déterminer la fonction de répartition de X.

3) Soit φ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$. Posons $Y = \varphi(X)$.

   a) Montrer que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$ et déterminer sa bijection réciproque.
   b) Déterminer la fonction de répartition de Y
   c) En déduire la loi suivie par Y.

⋆

Exercice 9 — **Voir correction**

(Loi log-normale) Soit Y une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres (m, σ^2) et soit $X = \mathrm{e}^Y$.

1) Montrer que X est une variable aléatoire à densité et préciser sa fonction de répartition. On dit que X suit la loi log-normale de paramètres (m, σ^2).
2) En déduire une densité de X.
3) Montrer que X admet une espérance et une variance et calculer $E(X)$ et $V(X)$.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 10 — **Voir correction**

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. Calculer

$$I = \int_0^1 \mathbb{E}(\max(x,U))\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \mathbb{E}\left(\int_0^1 \max(x,U)\,\mathrm{d}x\right)$$

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 11 — **Voir correction**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$

1) Montrer que f est une fonction de densité d'une variable aléatoire X. Cette loi s'appelle **loi logistique standard.**
2) Montrer que X admet une espérance puis déterminer $\mathbb{E}[X]$ sans calcul d'intégrale.
3) Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0;1[)$. Déterminer la loi de $\ln\left(\dfrac{U}{1-U}\right)$

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 12 — **Voir correction**

(d'après BCE 2024) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et g la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{(2+x)^2} & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ On suppose que g est une densité de probabilité d'une variable aléatoire Z définie sur Ω.

1) Déterminer la valeur de λ
2) Déterminer la fonction de répartition de Z.
3) On suppose que $Z(\Omega) =]0,1]$ et on pose $Y = Z + \dfrac{1}{Z}$. On admet que Y est une variable aléatoire définie sur Ω. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par Y.
4) Déterminer la fonction de répartition de Y.
5) La variable aléatoire Y est-elle à densité ? Si oui, donner une densité de Y.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 13 — **Voir correction**

Soit c un réel et soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{1+x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1) Déterminer c tel que f soit une densité de probabilité d'une variable aléatoire.
2) Soit X une variable aléatoire de densité f. Montrer que $Y = \dfrac{1}{X} - \left\lfloor \dfrac{1}{X} \right\rfloor$ est une variable à densité qui suit la même loi que X.

Le coin des Khûbes

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 14 — Voir correction

(d'après HEC 2022) Soit c un réel strictement positif. On note f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{\mathrm{e}^{-c^2 x} - \mathrm{e}^{-4c^2 x}}{x \ln 4} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On admet que f est une fonction densité de probabilité, et on note X une variable aléatoire de densité f.

1) Montrer que X admet une espérance et calculer sa valeur.
2) On note $Y = \sqrt{X}$. Montrer que Y est une variable à densité et préciser une fonction de densité de Y.
3) Montrer que Y admet une espérance et une variance et donner leurs valeurs.

⋆

Exercice 15 — Voir correction

(d'après ENS Lyon 2025) *On définit la partie entière supérieure d'un réel x comme l'unique entier noté $\lceil x \rceil$ vérifiant :*

$$\lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil$$

Par exemple : $\lceil 1,2 \rceil = 2$, $\lceil 4,7 \rceil = 5$, $\lceil 7 \rceil = 7$.
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre 1.
On pose $Y = \lceil X \rceil$ et $Z = Y - X$.

1) Déterminer la loi de Y puis calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.
2) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0,1]$, calculer $P((Z \leq t) \cap (Y = k))$.

On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \dfrac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e} - 1} & \text{si } t \in]0;1[\\ 0 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

3) Montrer que Z admet une densité et que la fonction f est une densité de Z.
4) Justifier que Z admet une espérance et la calculer.
5) Justifier que Z admet une variance et la calculer.

Correction des exercice

Correction de l'exercice 1 : Pour tout réel x, $4x \leq x^2+3 \iff x^2+3-4x \geq 0 \iff (x-4)(x+1) \geq 0 \iff x \in]-\infty;-1[\cup]4;+\infty[$.
On en déduit que $\mathbb{P}(4X \leq X^2+3) = \mathbb{P}(X \leq -1) + \mathbb{P}(X \geq 4) = \mathbb{P}(X \geq 4) = \int_4^{+\infty} 2\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-8}$.

Correction de l'exercice 2 : On a :

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{X} > 5\right) &= P\left(X \in]0;\frac{1}{5}[\right) \\ &= \frac{1/5}{20} \\ &= \frac{1}{100} \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 6 :

1) Y est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ donc X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
2) Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

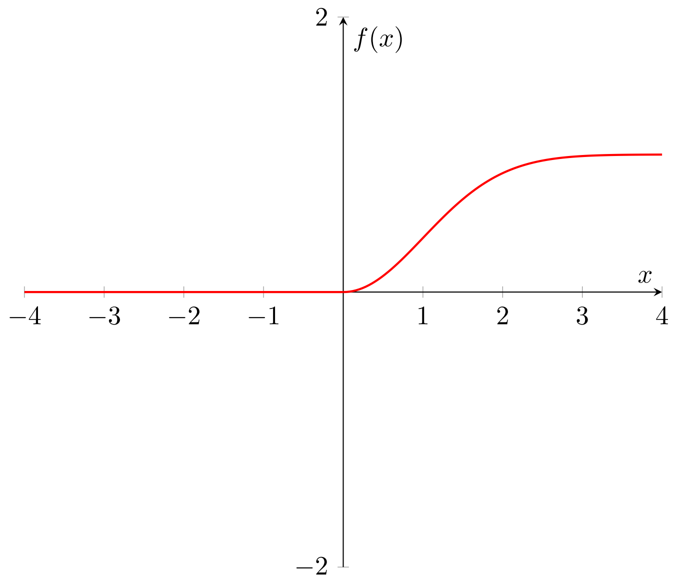
$$\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(Y \in]k-1;k]) = \mathbb{P}(Y \in](k-1)L;kL]) = \int_{(k-1)L}^{kL} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_{(k-1)L}^{kL} = \mathrm{e}^{-\lambda(k-1)L} - \mathrm{e}^{-\lambda kL}$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, on a donc $\mathbb{P}(X=k) = (\mathrm{e}^{-\lambda L})^{k-1} - (\mathrm{e}^{-\lambda L})^{k} = (\mathrm{e}^{-\lambda L})^{k-1}(1-\mathrm{e}^{-\lambda L}) = (\mathrm{e}^{-\lambda L})^{k-1}(1-\mathrm{e}^{-\lambda L})$
Ainsi, X suit une loi géométrique de paramètre $1-\mathrm{e}^{-\lambda L}$.

3) $\mathbb{E}[X] = \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-\lambda L}}$ car X suit une loi géométrique de paramètre $1-\mathrm{e}^{-\lambda L}$.
$\mathbb{E}[Y] = \dfrac{1}{\lambda}$ car Y suit une loi exponentielle de paramètre λ.
On cherche donc s'il existe un réel $L>0$ tel que $\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-\lambda L}} = \dfrac{1}{\lambda}$.
$\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-\lambda L}} = \dfrac{1}{\lambda} \iff 1-\mathrm{e}^{-\lambda L} = \lambda \iff \mathrm{e}^{-\lambda L} = 1-\lambda$.
Si $\lambda \geq 1$, cette équation n'a pas de solution.
Si $\lambda \in [0;1[$, cette équation admet pour unique solution $L = -\dfrac{\ln(1-\lambda)}{\lambda}$

Correction de l'exercice 7 :

1) f est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ comme produit et composée de fonctions continues, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.
Pour tout $x \in]-\infty;0[$, $f(x) = 0 \geq 0$. Pour tout $x \in [0;+\infty[$, $x \geq 0$ et $\mathrm{e}^{-x^2/2} > 0$ donc $f(x) \geq 0$. Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$.
Enfin, on a $\int_{-\infty}^0 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^0 0\,\mathrm{d}t = 0$ et $\forall A \geq 0$, $\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^A t\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t^2/2}\right]_0^A = 1-\mathrm{e}^{-A^2/2} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 1$
donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.
f est donc une fonction de densité, il existe donc une variable aléatoire X telle que f est une densité de X.
2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t$
Si $x<0$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^x 0\,\mathrm{d}t = 0$.
Si $x \geq 0$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^0 0\,\mathrm{d}t + \int_0^x t\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = 1-\mathrm{e}^{-x^2/2}$
3) $F_X'(x) = f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$ donc F_X est constante sur $]-\infty;0[$ et strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$. Enfin, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2} - x^2\,\mathrm{e}^{-x^2/2} = \mathrm{e}^{-x^2/2}(1-x^2)$ donc $F_X''(x)$ admet un point d'inflexion en $x=1$.



:

4) Il faut montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument, c'est à dire que $\int_{-\infty}^{+\infty} |tf(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.
Or, pour $t<0$, $tf(t)=0$ et pour $t\geq 0$, $tf(t)=t^2\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\geq 0$.

$$\begin{aligned}\forall A>0,\ \int_0^A tf(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^A t^2\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^A t\times t\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t\\ &= \left[t\times(-\,\mathrm{e}^{-t^2/2})\right]_0^A + \int_0^A \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^A \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t - A\,\mathrm{e}^{-A^2/2}\end{aligned}$$

Le deuxième terme tend vers 0 lorsque $A\to+\infty$ par croissance comparée, et le premier terme converge, on reconnaît l'intégrale de Gauss : $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t=1$ donc $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
On a finalement $\mathbb{E}[X]=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
Montrons que X admet une variance : il faut montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

$$\begin{aligned}\forall A>0,\quad \int_0^A t^2 f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^A t^2\times(t\,\mathrm{e}^{-t^2/2})\,\mathrm{d}t\\ &= \left[t^2\times(-\,\mathrm{e}^{-t^2/2})\right]_0^A + \int_0^A 2t\times\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t\\ &= -A^2\,\mathrm{e}^{-A^2/2} + \left[-2\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\right]_0^A\\ &= -A^2\,\mathrm{e}^{-A^2/2} + 2 - 2\,\mathrm{e}^{-A^2/2}\\ &\xrightarrow[A\to+\infty]{} 2\end{aligned}$$

donc X admet un moment d'ordre 2 et $\mathbb{E}[X^2]=2$.
Finalement, X admet une variance et d'après la formule de Koenig-Huygens on a $V(X)=\mathbb{E}[X^2]-\mathbb{E}[X]^2=2-\frac{\pi}{2}=\frac{4-\pi}{2}$.

5) Soit F_Y la fonction de répartition de Y.

$$\begin{aligned}
\forall y \in \mathbb{R}, \quad F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) \\
&= \mathbb{P}(X^2 \leq y) \\
&= \begin{cases} \mathbb{P}(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{si } y < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \mathbb{P}(X \leq \sqrt{y}) & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{si } y < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \mathbb{P}(X \leq \sqrt{y}) & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{si } y < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-y/2} & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle, donc Y suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 8 :

1) ▷ f est continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas
   ▷ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ et $(1 + \mathrm{e}^{-x})^2 > 0$ donc $f(x) > 0$.
   ▷ Pour tous réels $A < B$ on a :

$$\begin{aligned}
\int_A^B f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_A^B \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-t}}\right]_A^B \\
&= \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-B}} - \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-A}}
\end{aligned}$$

   et cette quantité tend vers 1 lorsque A tend vers $-\infty$ et B tend vers $+\infty$, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

2) Notons F la fonction de répartition de X. On a :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{A \to -\infty} \int_A^x f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{A \to -\infty} \left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} - \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-A}}\right) \\
&= \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}
\end{aligned}$$

3) a) φ est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+1) - \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-1)}{(\mathrm{e}^x+1)^2} \\
&= \frac{2\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} \\
&> 0
\end{aligned}$$

donc φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Enfin, $\lim_{x\to-\infty}\varphi(x) = -1$ et $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = 1$. Le théorème de la bijection permet donc d'affirmer que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1;1[$. De plus, pour tout $y \in]-1;1[$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(x) = y &\iff \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1} = y \\
&\iff \mathrm{e}^x - 1 = y(\mathrm{e}^x + 1) \\
&\iff \mathrm{e}^x(1-y) = y + 1 \\
&\iff \mathrm{e}^x = \frac{1+y}{1-y} \\
&\iff x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)
\end{aligned}$$

donc la bijection réciproque de φ est :

$$\begin{array}{rccc}
\varphi^{-1}: &]-1;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\
& y & \longmapsto & \ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)
\end{array}$$

b) On en déduit que pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$P(Y \leq y) = P(\varphi(X) \leq y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \geq 1 \\ P(X \leq \varphi^{-1}(y)) & \text{si } y \in]-1;1[\\ 0 & \text{si } y \leq -1 \end{cases}$$

or pour tout $y \in]-1;1[$, on a :

$$\begin{aligned}
P(X \leq \varphi^{-1}(y)) &= F(\varphi^{-1}(y)) \\
&= \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-\varphi^{-1}(y)}} \\
&= \frac{1}{1 + \frac{1-y}{1+y}} \\
&= \frac{1+y}{2}
\end{aligned}$$

donc finalement :

$$\boxed{P(Y \leq y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \geq 1 \\ \dfrac{1+y}{2} & \text{si } y \in]-1;1[\\ 0 & \text{si } y \leq -1 \end{cases}}$$

donc Y suit la loi uniforme sur $[-1;1]$.

Correction de l'exercice 9 :

1) Notons F la fonction de répartition de X. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned}
F(x) &= P(X \leq x) \\
&= P(\mathrm{e}^Y \leq x) \\
&= \begin{cases} P(Y \leq \ln x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \phi(\ln x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

où ϕ est la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Comme $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ et que $\lim\limits_{x \to -\infty} \phi(x) = 0$ on a bien :

- F est continue sur $]-\infty; 0[$ car constante, continue sur $]0; +\infty[$ par composition de fonctions continues, continue en 0 car $\lim\limits_{x \to 0} \phi(\ln(x)) = 0$
- F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0, car constante sur $]-\infty; 0[$ et composition de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$ par composition car $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \phi(x) = 1$.
- F est croissante par composition de fonctions croissantes

On en conclut que F est la fonction de répartition d'une variable à densité, donc X est bien une variable à densité.

2) En notant f la densité de X on a :

$$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[, f(x) = \quad F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\phi'(\ln(x)) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{x}\phi'(\ln(x)) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-(\ln x - m)^2/2\sigma^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

3) Pour tout $x > 0$, $xf(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-(\ln x - m)^2/2\sigma^2}$. En posant le changement de variable $u = \dfrac{\ln x - m}{\sigma} \iff x = \mathrm{e}^{\sigma u + m}$, on a $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{\sigma x}$ et $\mathrm{d}x = \sigma\,\mathrm{e}^{\sigma u + m}\,\mathrm{d}u$ et donc :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \forall B > 0, \quad \int_B^A \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-(\ln x - m)^2/2\sigma^2} \,\mathrm{d}x = \int_{(\ln B - m)/\sigma}^{(\ln A - m)/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\sigma\,\mathrm{e}^{\sigma u + m} \,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{\mathrm{e}^m}{\sqrt{2\pi}} \int_{(\ln B - m)/\sigma}^{(\ln A - m)/\sigma} \mathrm{e}^{-(u^2 - 2\sigma u))/2)} \,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{\mathrm{e}^m}{\sqrt{2\pi}} \int_{(\ln B - m)/\sigma - \sigma}^{(\ln A - m)/\sigma - \sigma} \mathrm{e}^{-(s^2 - \sigma^2)/2} \,\mathrm{d}s \qquad \text{en posant } s = u - \sigma$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{m + \sigma^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{(\ln B - m)/\sigma - \sigma}^{(\ln A - m)/\sigma - \sigma} \mathrm{e}^{-s^2/2} \,\mathrm{d}s$$

et cette expression tend vers $\mathrm{e}^{m+\sigma^2/2} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-s^2/2} \,\mathrm{d}s = \mathrm{e}^{m+\sigma^2/2}$ lorsque B tend vers 0 et A tend vers $+\infty$. On en conclut que X admet une espérance et :

$$\boxed{E(X) = \mathrm{e}^{m+\sigma^2/2}}$$

Pour tout $x > 0$, $x^2 f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-(\ln x - m)^2/2\sigma^2}$ donc en posant le même changement de variable que précédemment on a :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \forall B > 0, \quad \int_B^A x^2 f(x) \,\mathrm{d}x = \int_{(\ln B - m)/\sigma}^{(\ln A - m)/\sigma} \frac{\mathrm{e}^{\sigma u + m}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\sigma\,\mathrm{e}^{\sigma u + m} \,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{2m}}{\sqrt{2\pi}} \int_{(\ln B - m)/\sigma}^{(\ln A - m)/\sigma} \mathrm{e}^{-(u^2 - 4\sigma u)/2} \,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{2m}}{\sqrt{2\pi}} \int_{(\ln B - m)/\sigma}^{(\ln A - m)/\sigma} \mathrm{e}^{-(s^2 - 4\sigma^2)/2} \,\mathrm{d}s \qquad \text{en posant } s = u - 2\sigma$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{2m+2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{(\ln B-m)/\sigma}^{(\ln A-m)/\sigma} \mathrm{e}^{-(s^2)/2}\,\mathrm{d}s \qquad \text{en posant } s = u - 2\sigma$$

et lorsque A tend vers $+\infty$ et B tend vers 0 cette expression tend vers $\mathrm{e}^{2m+2\sigma^2} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-s^2/2}\,\mathrm{d}s = \mathrm{e}^{2m+2\sigma^2}$. On en déduit que X admet un moment d'ordre 2 et que $E(X^2) = \mathrm{e}^{2m+2\sigma^2}$ puis d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \mathrm{e}^{2m+2\sigma^2} - (\mathrm{e}^{m+\sigma^2/2})^2 \\ &= \mathrm{e}^{2m+2\sigma^2} - \mathrm{e}^{2m+\sigma^2} \\ &\boxed{= \mathrm{e}^{2m+\sigma^2}(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1)} \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 10 : Soit $x \in [0,1]$ un réel fixé. Pour tout $t \in [0,1]$, posons $\varphi_x(t) = \max(x,t) = \begin{cases} x & \text{si } t \leq x \\ t & \text{si } t > x \end{cases}$.
φ_x est une fonction continue à valeurs dans $[0,1]$.
Si on note f la fonction de densité de U, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_x(t)| f(t)\,\mathrm{d}t$ converge car f est nulle en dehors de $[0,1]$. D'après le théorème de transfert on a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0,1], \quad \mathbb{E}(\max(x,U)) &= \int_0^1 \varphi_x(t) f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x x\,\mathrm{d}t + \int_x^1 t\,\mathrm{d}t \\ &= x^2 + \frac{1^2 - x^2}{2} \\ &= \frac{1+x^2}{2} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mathbb{E}(\max(x,U))\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1+x^2}{2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Intéressons-nous à la variable aléatoire $V = \int_0^1 \max(x,U)\,\mathrm{d}x$.
Pour tout $t \in [0,1]$ on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \max(x,t)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \varphi_x(t)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^t t\,\mathrm{d}x + \int_t^1 x\,\mathrm{d}x \\ &= t^2 + \frac{1-t^2}{2} \\ &= \frac{1+t^2}{2} \end{aligned}$$

donc $V = \dfrac{1+U^2}{2}$, ainsi $\mathbb{E}(V) = \mathbb{E}\left(\dfrac{1+U^2}{2}\right) = \dfrac{1}{2}(1+\mathbb{E}(U^2))$ et $\mathbb{E}(U^2) = V(U) + \mathbb{E}(U)^2$ (d'après la formule de Koenig-Huygens) donc $\mathbb{E}(U^2) = \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 11 :

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ et $(1+\mathrm{e}^{-x}) > 1$ donc $(1+\mathrm{e}^{-x})^2 > 1$ donc $f(x) > 0$.
De plus, f est continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
Il reste à vérifier que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1. Il y a deux impropriété, en $-\infty$ et en $+\infty$:

$$\begin{aligned}\forall A < 0, \quad \int_A^0 f(t)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right]_A^0 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-A}} \\ &\xrightarrow[A\to-\infty]{} \frac{1}{2}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\forall A > 0, \quad \int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right]_0^A \\ &= \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-A}} - \frac{1}{2} \\ &\xrightarrow[A\to+\infty]{} 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$
Finalement, f est une fonction de densité donc il existe une variable aléatoire X telle que f est une densité de X.

2) X admet une espérance si $\int_{-\infty}^{+\infty} |tf(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.
Cette intégrale a deux impropriétés, en $-\infty$ et en $+\infty$. On a $\left|\dfrac{t^3\,\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2}\right| \underset{t\to-\infty}{\sim} \dfrac{-t^2\,\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^{-2t}} \underset{t\to-\infty}{\sim} -t^2\,\mathrm{e}^{t}$.
Or par croissance comparée $\lim\limits_{t\to-\infty} t^2\,\mathrm{e}^t = 0$, donc $\dfrac{t\,\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2} \underset{t\to-\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente on en conclut que $\int_{-\infty}^{0} |tf(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.
De même, en $+\infty$, $\dfrac{t^3\,\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} t^3\,\mathrm{e}^{-t}$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} t^3\,\mathrm{e}^{-t} = 0$ d'où $\dfrac{t\,\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2} = \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente, l'intégrale $\int_0^{+\infty} tf(t)$ converge aussi.
Finalement X admet une espérance. Étudions la parité de f :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) &= \frac{\mathrm{e}^{x}}{(1+\mathrm{e}^{x})^2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{-2x}}{(1+\mathrm{e}^{x})^2 \times \mathrm{e}^{-2x}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-x}}{[(1+\mathrm{e}^{x})\,\mathrm{e}^{-x}]^2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(\mathrm{e}^{-x}+1)^2} \\ &= f(x)\end{aligned}$$

f est paire donc $t \mapsto tf(t)$ est impaire, donc $\mathbb{E}[X] = 0$.

3) Soit F la fonction de répartition de $\ln\left(\dfrac{U}{1-U}\right)$.
On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \mathbb{P}\left(\ln\left(\frac{U}{1-U}\right) \leq x\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{P}\left(\frac{U}{1-U} \leq \mathrm{e}^x\right) \\
&= \mathbb{P}\left(U \leq (1-U)\,\mathrm{e}^x\right) && \text{car } 1-U \geq 0 \\
&= \mathbb{P}(U(1+\mathrm{e}^x) \leq \mathrm{e}^x \\
&= \mathbb{P}\left(U \leq \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right) && \text{car } 1+\mathrm{e}^x > 0 \\
&= \mathbb{P}\left(U \leq \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right) \\
&= \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} && \text{car } \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} \in]0;1[\text{ et que } U \text{ suit la loi uniforme sur }]0;1[
\end{aligned}
$$

On remarque que la fonction de répartition de $\ln\left(\frac{U}{1-U}\right)$ est la même que celle de X, donc $\ln\left(\frac{U}{1-U}\right)$ suit la loi logistique standard.

Correction de l'exercice 13 :

1) f est continue sur $]-\infty;0[$, sur $[0,1]$ et sur $]1;+\infty[$, donc continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1.
f est positive sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{c}{1+x}\,\mathrm{d}x = c\ln 2$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 \iff c = \frac{1}{\ln(2)}$.
f est donc une densité de probabilité si et seulement si $c = \dfrac{1}{\ln 2}$.

2) Par définition on a pour tout réel x : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. Ainsi, $0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$. On en déduit que Y est à valeur dans $[0,1[$.
Ainsi :

— Pour tout réel $x < 0$, $\mathbb{P}(Y \leq x) = 0$
— Pour tout réel $x \geq 1$, $\mathbb{P}(Y \leq x) = 1$

Reste à étudier le cas où $x \in [0,1[$. La famille $\left(\left\lfloor \frac{1}{X} \right\rfloor = k\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \leq x) &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{X} - \left\lfloor \frac{1}{X} \right\rfloor \leq x\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\frac{1}{X} - \left\lfloor \frac{1}{X} \right\rfloor \leq +x\right\} \cap \left\{\left\lfloor \frac{1}{X} \right\rfloor = k\right\}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\frac{1}{X} \leq k+x\right\} \cap \left\{k \leq \frac{1}{X} < k+1\right\}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(k \leq \frac{1}{X} \leq k+x\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{k+x} \leq X \leq \frac{1}{k}\right) && \text{car } \mathbb{P}(X \geq 0) = 1 \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(c\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - c\ln\left(1+\frac{1}{k+x}\right)\right) \\
&= c\sum_{k=1}^{+\infty} (\ln(k+1) - \ln(k)) - c\sum_{k=1}^{+\infty} \ln(k+x+1) - \ln(k+x) \\
&= c\ln(1+x) && \text{par sommes téléscopiques}
\end{aligned}
$$

On reconnaît la fonction de répartition de X donc Y suit la même loi que X.